

Opakování kombinatoriky

1. Kolik přímek určuje deset různých bodů v rovině, z nichž a) žádné tři neleží v přímce; b) právě šest leží v přímce.
2. Kolik kružnic určuje deset různých bodů v rovině, z nichž a) žádné tři neleží v přímce; b) právě pět leží v přímce?
3. V prostoru je dáno 15 různých bodů. Kolik rovin tyto body určují, jestliže a) žádné tři neleží v jedné rovině; b) právě 8 leží v jedné rovině?
4. Určete počet všech úhlopříček v konvexním n -úhelníku.
5. Ve třídě je 30 žáků. Kolika způsoby lze vybrat čtveřici žáků na zkoušení?
6. Na běžecké trati soutěží 8 závodníků. Do finále postupují první tři. Kolik je možností na postupující trojici?
7. Kolika způsoby lze rozdělit 12 hráčů na dvě šestičlenná družstva?
8. Kolika způsoby lze rozdělit 4 dívky a 8 chlapců na dvě šestičlenná volejbalová družstva tak, aby v každém družstvu byla dvě děvčata a 4 chlapci?
9. Test přijímací zkoušky se skládá z 10 otázek z chemie, z 10 otázek z biologie a z 10 otázek z fyziky. V každém předmětu je vybíráno ze 200 navržených otázek. Kolik je možností sestavit test? (Na pořadí otázek nezáleží.)
10. V krabici je 10 výrobků, z nichž jsou právě tři vadné. Kolika způsoby lze vybrat 5 výrobků tak, aby
 - a) žádný nebyl vadný,
 - b) právě jeden byl vadný,
 - c) nejvýše jeden byl vadný,
 - d) právě dva byly vadné,
 - e) nejvýše dva byly vadné,
 - f) alespoň dva byly vadné?
11. Kolika způsoby lze 20 dětí rozdělit do tří skupin tak, aby v první skupině bylo 10 dětí, ve druhé bylo 6 dětí a ve třetí zbytek?
12. V rotě je 5 důstojníků a 50 vojáků. Kolika způsoby lze sestavit službu, která se skládá z jednoho důstojníka a tří vojáků?
13. Kolika způsoby lze posadit čtyři hosty A, B, C, D na čtyři křesla a, b, c, d ?
14. Kolik dvojciferných čísel má obě číslice sudé? Číslice se neopakují.
15. Vypočítejte
$$\frac{7! + 6! + 5!}{8! - 7!} \cdot \frac{17! - 16! + 16! - 15! + 15!}{14!}$$
16. Vypočítejte
$$\frac{17! - 16! + 16! - 15! + 15!}{14!}$$
17. Řešte rovnici s neznámou $n \in \mathbf{Z}^+$: $3 \cdot n! = (n+1)! - n!$
18. Řešte rovnici s neznámou $n \in \mathbf{Z}^+$: $(n-1)! + (n-2)! = n!$
19. Určete všechna $x \in \mathbf{Z}^+$, pro něž platí:
$$\binom{9}{4} = \binom{9}{x}$$
20. Určete všechna $x \in \mathbf{Z}^+$, pro něž platí:
$$\binom{x+4}{x+1} - \binom{x+3}{x} = 15(x+2)$$
21. Ve společnosti šesti osob si přiřukl sklenkou každý s každým. Kolik cinknutí se ozvalo?

Opakování kombinatoriky

22. Kolika přímkami lze spojit šest bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce?
23. Kolika přímkami lze spojit šest bodů v rovině, leží-li čtyři z nich v jedné přímce?
24. Zvětší-li se počet prvků o jeden, zvětší se počet kombinací třetí třídy o 21. Kolik je prvků?
25. Kolik různých umístění může být na prvních třech místech mistrovství světa, zúčastní-li se ho 8 družstev?
26. Kolik trikolór lze sešít z pěti barev, jestliže se v každé trikolóře může každá barva vyskytovat jen jednou?
27. Kolik trojčiferných přirozených čísel dělitelných pěti lze sestavit z číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5, jestliže je možno každou číslici v každém zápise použít jen jednou?
28. Řešte rovnici $V(2, x-2) + V(2, x+1) = 22$

29. 8 spolužáků si slíbilo, že si pošlou vzájemně pohledy z prázdnin. Kolik pohlednic rozeslali?

30. Upravte výraz (n je libovolné přirozené číslo):
$$\frac{(n-1)!}{(n+1)!} + \frac{(3n+3)!}{(3n+4)!}$$

31. Upravte výraz (n je libovolné přirozené číslo):
$$\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n-2)!}$$

32. Zjednodušte: a)
$$\frac{n!}{(n-3)!} + \frac{(n+1)!}{(n-2)!} + \frac{(n+2)!}{(n-1)!} - (n^2 - 4)$$

b)
$$\frac{n!}{(n+1)!} - \frac{(n+1)!}{(n+2)!} - \frac{(n+2)!}{(n+3)!} - \frac{n!}{(n+3)!}$$

33. Řešte v \mathbb{N} rovnice : a)
$$\binom{x-1}{x-3} + \binom{x-2}{x-4} = 9$$

b)
$$\binom{6}{5} \binom{y+1}{y-1} - \binom{6}{4} \binom{y+2}{y+1} = \binom{4}{2}$$

34. Řešte v \mathbb{N} nerovnici : a)
$$\binom{n}{2} + \binom{n+3}{n+1} + \binom{n+6}{n+4} < 93$$

35. V binomickém rozvoji výrazu $\left(\frac{x}{4} - \frac{\sqrt{2}}{x^2}\right)^{15}$ zjistěte člen rozvoje neobsahující x

36. Určete všechna reálná čísla x tak, aby čtvrtý člen binomického rozvoje daného výrazu

$$\left(x^{\frac{1}{2(1+\log x)}} + \sqrt[12]{x}\right)^6 \text{ byl roven } 200.$$

37. Třetí člen binomického rozvoje výrazu $\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{7}}{2}} + m\right)^8$ je roven 1. Zjistěte, čemu se rovná m .

38. Zjistěte, který člen binomického rozvoje výrazu $\left(2x^3 - \frac{\sqrt{2}}{x^2}\right)^{10}$ neobsahuje x .

Opakování kombinatoriky

39. Při výrobě určité součástky je třeba provést čtyři operace A, B, C, D, pro které platí následující podmínky:
- operace B nesmí být první a operace A nesmí být poslední.
 - operaci C musíme provést dříve než operaci D.
- Kolik různých postupů existuje při výrobě této součástky?
40. Určete počet vojáků strážního oddílu, víte-li, že z něho můžete vybrat 210 různých čtyřčlenných hlídek.
41. Kolik různých součinů o dvou činitelích lze utvořit z čísel 2, 3, 5, 7?
42. Pokladna má zámek s pěti kotouči, na nichž jsou číslice 0, 1, 2, 3, ..., 9. Zámek se otevře, jestliže se nastaví pětice čísel, které je „heslem“. Pokladník zapomněl heslo a pamatuje si pouze číslici na místě desítek. Jak dlouho by mu trvalo vyzkoušení všech možných pětice čísel se známou číslicí na místě desítek, jestliže na nastavení jedné pětice potřebuje 3,6 s?
43. V prostoru je 12 obecně položených bodů. Kolik čtyřstěn lze z těchto bodů jako vrcholů utvořit? Kolik čtyřstěn bychom vytvořili, kdyby 6 z nich leželo v jedné rovině?

Permutace s opakováním

- V krabici jsou 4 stejné červené, 3 stejné modré, 2 stejné zelené a jedna žlutá pastelka. Kolika způsoby lze pastelky v krabici uspořádat?
- Ze sedmi kuliček, z nichž jsou čtyři modré, jedna bílá, jedna červená a jedna zelená, máme vybrat a položit do řady vedle sebe pět kuliček. Kolika způsoby to lze provést, když
 - právě dvě budou modré;
 - aspoň tři budou modré,
- Určete počet způsobů, jimiž lze umístit všechny bílé šachové figurky
 - na dvě pevně zvolené řady šachovnice 8 x 8;
 - na libovolné dvě řady šachovnice 8 x 8.
- Určete počet všech desetiferných přirozených čísel, jejichž ciferný součet je roven třem.
- Kolika způsoby lze ze skupiny 10 dívek a 7 chlapců vybrat čtveřici, ve které budou nejvýše 2 děvčata?
- Kolik různých jednohlasých melodií složených ze čtyř tónů je možno vytvořit z tónů stupnice C dur? Uvažujme tóny v rámci jedné oktávy a tóny se v melodii neopakují.
- Máme balíček 32 karet.
 - Kolika způsoby lze vybrat list, který obsahuje 8 karet.
 - Kolika způsoby lze rozdat karty tak, aby daný hráč dostal 3 srdce a 2 piky. Karty ostatních hráčů nebereme v úvahu.
 - Kolika způsoby lze rozdat karty tak, aby jeden hráč dostal všechna esa. Karty ostatních hráčů nebereme v úvahu.
- Kolik pětiferných čísel lze sestavit z číslic 0, 1, 3, 4, 7, 8? Kolik z nich je sudých? Kolik z nich má na místě stovek nulu?
- Národní mužstvo ČSSR vyslané v roce 1962 na MS v kopané, mělo na soupisce 3 brankáře, 5 obránců, 4 záložníky a 10 útočníků. Kolik různých sestav mohl trenér na jednotlivá utkání postavit, jestliže se tehdy hrálo systémem 2 – 3 – 5?
- Existují čtyři základní krevní skupiny A, B, AB, 0. Určete počet všech možných rozdělení 10 osob podle uvedených krevních skupin.

Opakování kombinatoriky

Variace, permutace, kombinace s opakováním

1. Kolik značek Morseovy abecedy lze sestavit z teček a čárek, vytváříme-li skupiny o jednom až čtyřech prvcích?
2. Kolik pěticiferných čísel lze sestavit z cifer 2, 3, 4, 6, 7, 9 jestliže se cifry mohou opakovat,
3. V krabičce je 10 pastelek, z toho 4 stejné červené, 3 stejné modré, 2 stejné žluté a jedna zelená pastelka. Kolika způsoby lze pastelky v krabičce spořádat?
4. Na panelu je k žárovek, z nichž každá může svítit zeleně, žlutě nebo červeně. Určete, kolik různých stavů může panel signalizovat ?
5. Apolloniovu úlohou se rozumí úloha sestrojít kružnici, která má tři z těchto vlastností :prochází daným bodem, dotýká se dané přímky, dotýká se dané kružnice. (Označíme-li tyto vlastnosti pořadě písmeny B, p, k, můžeme každou Apolloniovu úlohu zapsat pomocí trojice z těchto písmen; např. Bpp) Určete počet všech Apolloniových úloh.
6. Určete počet všech trojúhelníků, z nichž žádné dva nejsou shodné a jejichž každá strana má jednu z velikostí daných čísly 4, 5, 6, 7, 8, 9.
7. V samoobsluze mají čtyři druhy kávy, každý po padesáti gramech. Určete, kolika způsoby lze koupit 250 g kávy, jestliže:
 - a) balíčků každého druhu mají dostatečný počet;
 - b) od dvou druhů mají deset balíčků a od zbývajících dvou pouze po čtyřech balíčcích.
8. Určete, kolika způsoby si mohou tři osoby rozdělit osm stejných jablek.
9. Určete, kolik čtyřciferných přirozených čísel lze sestavit z čísel 2, 3, 8, 1. (V těchto číslech se každá cifra vyskytuje nejvýše tolikrát, kolikrát se vyskytuje v daném čísle.)