Integrální počet

Def.: Mějme dány funkce *F, ,f* definované v otevřeném intervalu J. Jestliže pro všechna $x \in$ J platí

$$F'(x) = f(x),$$

říkáme, že funkce *F* je primitivní funkcí k funkci *f* v intervalu J.

Pro označení primitivní funkce používáme zápis $\int f(x)dx = F(x) + C$ - neurčitý integrál

Věta: Je-li funkce *F* v intervalu J primitivní funkcí k funkci *f*, pak každá primitivní funkce k funkci f je tvaru $F(x) + C$, kde *C* je reálná konstanta.

Věta: Ke každé funkci spojité v intervalu existuje v tomto intervalu primitivní funkce.

Základní vzorce pro primitivní funkce

1. $\int 0dx = C, x \in R$

2. $\int dx = x + C, x \in R$

3. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, x \in R - \{0\}, n \in Z - \{-1\}$

4. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, x \in R^+, n \in R - \{-1\}$

5. $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C, x \in R - \{0\}$

6 $\int e^x dx = e^x + C, x \in R$

7. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1, x \in R$

8. $\int \sin x dx = -\cos x + C, x \in R$

9. $\int \cos x dx = \sin x + C, x \in R$

10. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C, x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi ; \dfrac{\pi}{2} + k\pi \right), k \in Z$

11. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot gx + C, x \in (k\pi ; \pi + k\pi), k \in Z$

Věta : Existují-li v otevřeném intervalu J primitivní funkce k funkcím $f_1(x), f_2(x)$ a jsou-li c_1, c_2 libovolné konstanty, pak existuje primitivní funkce k funkci $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ a platí

$$\int [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] dx = c_1 \int f_1(x) dx + c_2 \int f_2(x) dx.$$

Integrační metody

Integrování metodou per partes

je založeno na derivaci součinu dvou funkce $(uv)' = u'v + uv'$.

Věta : Mají-li funkce $u(x), v(x)$ v intervalu $(a;b)$ spojité derivace, pak v $(a;b)$ platí

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Př.

a) $\int x\cos x dx$

b) $\int xe^x dx$

c) $\int x^2 \sin x dx$

d) $\int xe^{2x} dx$

e) $\int x^2 \ln x dx$

f) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

g) $\int e^x \sin x dx$

h) $\int \cos^2 x dx$

Integrování metodou substituční

substituční metoda nám umožňuje zavedením nové proměnné převést integrovanou funkci na funkci, kterou lze integrovat snadněji. Substituční metoda vychází v podstatě z věty o derivaci složené funkce

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Věta : Nechť funkce $F(t)$ je primitivní fukcí k funkci $f(t)$ v interalu $(\alpha;\beta)$. Nechť funkce $t = g(x)$ má derivaci $g'(x)$ v intervalu $(a;b)$. Pro každé $x \in (a;b)$ nechť hodnota $g(x)$ patří do intervalu $(\alpha;\beta)$. Pak v intervalu $(a;b)$ je funkce $F(g(x))$ primitivní funkcí k funkci $f(g(x)) \cdot g'(x)$, tj.

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(t)dt = F(t) \text{, kde } t = g(x).$$

Derivace funkce $t = g(x)$ se značí také $\frac{dt}{dx}$ a rovnost $\frac{dt}{dx} = g'(x)$ můžeme „formálné“ psát ve tvaru $dt = g'(x)dx$. Tento zápis nám pomůže zapamatovat si větu o substituci :ve výrazu $f(g(x)) \cdot g'(x)dx$ položíme $t = g(x)$ a místo $g'(x)dx$ píšeme dt – tedy $\int f(t)dt$.

Příklad: Vypočtěte $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$, kde $f(x) \neq 0$.

Řešení: subst. $t = f(x)$, potom $\frac{dt}{dx} = f'(x) \Rightarrow dt = f'(x)dx$ .Pak užitím substituce dostáváme

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|f(x)| + C$$